შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 1

04.05.2014/ მათ/IV/ M446

ამოცანა № 6

გვერდი № 1

$n^4+n^2+1=(n^2+1)^2-n^2=(n^2+n+1)(n^2-n+1)$

$(n+1)^4+(n+1)^2+1=((n+1)^2+1)^2-(n+1)^2=(n^2+n+1)(n^2+3n+3)$

დავთვალოთ უ.ს.გ.$(n^2-n+1; n^2+3n+3) = (4n+2; n^2-n+1)$

~~უ.ს.გ.~~ უ.ს.გ.$(4n+2; 4n^2-4n+4) = (4n+2; 2n+8) =$ უ.ს.გ.$(2n+8; 2n-6) =$ უ.ს.გ.$(2n-6; 14) = \left[\begin{matrix}2\\14\end{matrix}\right.$

$4n+2 \vdots 2$ $\quad n^2-n+1 \not\vdots 2 \Rightarrow$ უ.ს.გ.$(n^2-n+1; n^2+3n+3) = \left[\begin{matrix}1\\7\end{matrix}\right.$

უ.ს.გ.$(n^2-n+1; n^2+n+1) =$ უ.ს.გ.$(n^2+n+1; 2n) = 1$ რადგან $n^2+n+1 \not\vdots 2$ და უ.ს.გ.$(n^2+n+1; n) = 1$

უ.ს.გ.$(n^2+n+1; n^2+3n+3) =$ უ.ს.გ.$(n^2+n+1; 2n+2) =$

$=$ უ.ს.გ.$(n(n+1)+1; 2(n+1)) = 1$

ანუ თუ n^4+n^2+1-ის და $(n+1)^4+(n+1)^2+1$-ის უდიდესი მარტივი გამყოფები ტოლია, მაშინ ეს მარტივი რიცხვი ყოფს n^2+n+1-ს ან ტოლია 7-ის და ყოფს n^2-n+1-ს და n^2+3n+3-ს, ანუ $2n-6 \vdots 7 \Rightarrow n \equiv 3 \pmod 7$.

დავუშვათ საწინააღმდეგო, რომ ასეთი n-ების რაოდენობა სასრულია, ანუ $\exists m$, რომ $n=m$-სთვის ტოლია ეს მარტივი

გამყოფები, ხოლო $\forall n > m$-სთვის არცერთისთვის არ გამოდის. (ასეთი m მოიძებნება, რადგან $n=3$, $n=6$, $n=12$-სთვის გამოდის, ანუ არცერთი n-სთვის რომ არ გამოდიოდეს ეგ არ ხდება). $(m^2+m+1)(m^2-m+1)$-ს და $(m^2+m+1)(m^2+3m+3)$-ს უდიდესი მარტივი გამყოფი $= p$;

მაშინ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} p = 7 \\ m \equiv 3 \pmod 7 \end{cases} \\ m^2+m+1 \vdots p \end{array}\right.$

თუ $m^2+m+1 \vdots p$ მაშინ m^2+3m+3-ის უდიდესი მარტივი გამყოფი $< p$